تحقیقات مالی

Journal of Financial Research

دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران

DOI: 10.22059/jfr.2017.218621.1006298

دورهٔ ۱۹، شمارهٔ ۲

تابستان ۱۳۹۶

صص. ۲۱۶- ۱۹۳

برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار پرتفوی با استفاده از نظریهٔ امکان و الزام فازی

سید بابک ابراهیمی[۱]، مژگان آقایی شیخ رضی[۲]، نگین محبی[۳]

چکیده: یکی از نگرانی‌های اصلی سرمایه‌گذاران و مدیران مالی، نحوهٔ رویارویی با ریسک سرمایه‌گذاری و نوسان‌های بازده است؛ از این رو شناسایی، اندازه‌گیری و مدیریت ریسک، از موضوعات مهم در مباحث مالی تلقی می‌شود. در سال‌های اخیر، کانون توجه بسیاری از شرکت‌های مالی به معیار ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار برای اندازه‌گیری ریسک پرتفوی است. از جمله مهم‌ترین مشکلات روش‌های ارائه شده در اندازه‌گیری ریسک، در نظر نگرفتن عدم قطعیت موجود در داده‌های مالی است. به همین دلیل در پژوهش پیش رو برای تطابق بیشتر مدل با واقعیت، به برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار پرتفوی با لحاظ عدم قطعیت داده‌ها، پرداخته می‌شود. در این رابطه از مفهوم متغیر تصادفی فازی و نظریهٔ امکان و الزام فازی، به‌منظور پوشش عدم‌قطعیت موجود در داده‌های مالی، استفاده شده است. در نظر گرفتن عوامل ریسک به‌صورت متغیر تصادفی، این امکان را برای سرمایه‌گذار فراهم می‌کند که با پذیرش سطح خاصی از عدم قطعیت، میزان ریسک پرتفوی خود را برآورد کند. علاوه‌بر این در پژوهش پیش رو، کلیه برآوردها با دو فرض توزیع نرمال و تی استیودنت انجام شده و نتایج به‌دست آمده از حل مدل با داده‌های عددی، نشان‌دهندهٔ این است که لحاظ توزیع t و نیز عوامل ریسک به‌صورت متغیر تصادفی، سبب ایجاد برآوردهای محافظه‌کارانه‌تری برای دو سنجهٔ مد نظر شده است.

واژه‌های کلیدی: ***ارزش در معرض ریسک، ریزش موردانتظار، عدم قطعیت، متغیرهای تصادفی فازی، نظریهٔ امکان و الزام فازی.***

۱. استادیار گروه مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۳. کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۸/۰۳

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۶/۰۲/۳۰

نویسندهٔ مسئول مقاله: مژگان آقایی

E-mail: Aghaei.mojgan@yahoo.com

مقدمه

ریسک در بازارهای مالی مفهومی کلیدی است که باید نسبت به شناسایی، اندازه‌گیری و تصمیم‌گیری آن اقدام کرد. در تقسیم‌بندی کلی می‌توان دو دیدگاه برای ریسک در نظر گرفت: در دیدگاه اول ریسک هر گونه نوسان‌های احتمالی بازدهی در آینده در نظر گرفته می‌شود و دیدگاه دوم، ریسک هر گونه نوسان‌های احتمالی منفی بازدهی در آینده مد نظر قرار می‌گیرد (تبریزی و شریفیان، ۱۳۸۷). حال سؤال این است که کدام دیدگاه، ریسک سرمایه‌گذاران را بهتر تبیین کرده و نظر آنان را بهتر پوشش می‌دهد؟

مارکویتز (۱۹۵۲) اولین فردی بود که برای اندازه‌گیری ریسک معیار کمی ارائه داد. وی واریانس را معیاری برای اندازه‌گیری ریسک معرفی کرد؛ اما بعدها محققان بسیاری به این سنجهٔ ریسک انتقاد کردند؛ زیرا واریانس، نوسان‌های مطلوب قیمت به سمت بالا را به اندازهٔ نوسان‌های نامطلوب قیمت به سمت پایین جریمه می‌کند، در حالی که سرمایه‌گذاران از حرکت قیمت به سمت بالا استقبال می‌کنند و به‌دنبال مدیریت ریسک نامطلوب سرمایه‌گذاری خود هستند. ارزش در معرض ریسک[1] یکی از معیارهای اندازه‌گیری ریسک نامطلوب پرتفوی و بازار است. ابتدا مورگان در سال ۱۹۹۶ ارزش در معرض ریسک (VaR) را معرفی کرد و از آن پس به‌صورت گسترده توسط مؤسسه‌های مالی، سرمایه‌گذاران و مدیران مالی، به‌عنوان سنجهٔ استاندارد برای ارزیابی ریسک‌های مالی استفاده شد. شایان ذکر است که این سنجه به شکل درصدی از توزیع سود ـ زیان پرتفوی تعریف می‌شود و بر فرض نرمال بودن بازده دارایی‌ها استوار است. به‌دلیل سادگیِ مفهوم و سهولت در محاسبات، سنجهٔ ارزش در معرض ریسک جذابیت خاصی در برآورد ریسک سرمایه‌گذاری دارد، اما مفروضاتی که این سنجه بر آنها استوار است، کاستی‌هایی دارد که بسیاری از محققان به آن اشاره کرده‌اند. یکی از مشکلات اصلی آن، بی‌انسجامی این معیار است. از این رو در سال‌های اخیر، ارزش در معرض ریسک شرطی[2] یا ریزش موردانتظار[3] به‌منظور تکامل این سنجهٔ ریسک معرفی شده است. ریزش موردانتظار برابر با میانگین وزنی زیان‌های بیشتر از ارزش در معرض ریسک در یک سطح اطمینان مشخص است؛ این معیار، زیان موردانتظار را برابر یا بالاتر از ارزش در معرض ریسک برآورد می‌کند، از این رو برآوردهای محافظه‌کارانه‌تری دارد. نکتهٔ شایان توجه در برآورد ریسک پرتفوی این است که اطلاعات موجود در بازارهای مالی کامل نیستند و به همین دلیل تصمیم‌گیری در این بازار دارای عدم‌قطعیت

1. Value at Risk
2. Conditional Value at Risk
3. Expected Shortfall

است؛ عدم قطعیت در داده‌های مالی دارای دو جزء مهم است: تصادفی بودن و ابهام داشتن. بنابراین در نظر گرفتن این عدم قطعیت در تخمین ریسک پرتفوی از اهمیت خاصی برخوردار خواهد بود. استفاده از نظریه‌های منطق فازی در برآورد ریسک پرتفوی، این هدف را محقق کرده و نتایج واقعی‌تری به دنبال خواهد داشت.

با توجه به اهمیت برآورد ریسک پرتفوی در یک موقعیت سرمایه‌گذاری مشخص، در تحقیق پیش رو به برآورد ریسک به‌کمک سنجه‌های ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار، با لحاظ عدم‌قطعیت بازار و با استفاده از نظریه‌های امکان و الزام[1] فازی اقدام شده است.

پیشینهٔ پژوهش

در تئوری نوین پرتفوی مارکوویتز (۱۹۵۲)، ریسک، تغییرپذیری بازده‌ها حول بازده موردانتظار تعریف می‌شود و با استفاده از معیار واریانس به‌دست می‌آید. با فرض نرمال بودن توزیع بازده‌ها، واریانس معیار قابل قبولی برای اندازه‌گیری ریسک سبد سرمایه‌گذاری است، اما تحقیقات اخیر و نیز، مباحث تئوریک این فرض را رد می‌کنند. از آنجا که واریانس تغییرات مثبت و منفی قیمت را به یک اندازه جریمه می‌کند، معیار مناسبی برای سنجش و اندازه‌گیری ریسک نیست. در واقعیت، هر سرمایه‌گذار منطقی از نوسان‌های مثبت قیمت استقبال کرده و به دنبال راهی برای اندازه‌گیری نوسان‌های منفی سبد سرمایه‌گذاری خود است تا بتواند تصمیمات درستی اتخاذ کند. ارزش در معرض ریسک یکی از سنجه‌های اندازه‌گیری ریسک نامطلوب پرتفوی است که به‌صورت درصدی از حداکثر سود ـ زیان توزیع پرتفوی در یک بازهٔ زمانی مشخص و در سطح اطمینان معین، تعریف شده و بر فرض نرمال بودن بازده دارایی‌ها استوار است. مفروضاتی که این سنجه بر آن استوارند، کاستی‌هایی دارند که از آن جمله می‌توان به تأکید این سنجه بر نرمال بودن توزیع بازده دارایی‌ها اشاره کرد؛ اما در تحقیقات بسیاری فرضیهٔ نرمال بودن بازده دارایی‌های مالی رد شده است. همچنین ارزش در معرض ریسک، درصد زیان پرتفوی را مشخص می‌کند، اما اطلاعاتی دربارهٔ اندازهٔ زیان پرتفوی زمانی که در معرض ریسک قرار گرفته است، نمی‌دهد. علاوه‌بر این، چون ارزش در معرض ریسک جمع‌پذیر نیست، معیار منسجمی برای اندازه‌گیری ریسک محسوب نمی‌شود. برای برطرف‌کردن این ضعف، آرتزنر، دلبائن و ایبر (۱۹۹۷) سنجه‌ای به نام ریزش موردانتظار و با تعریف میزان زیان مورد انتظار در α درصد بدترین موارد را معرفی کردند. ریزش موردانتظار (ES) معیار منسجمی است و شدت زیان پرتفوی را اندازه‌گیری می‌کند.

1. Possibility and necessity measures

مطالعات بسیار روی ویژگی‌های داده‌های مالی نشان داده است که داده‌هـای مـالی از توزیـع نرمال تبعیت نمی‌کنند. مندلبورت (۱۹۶۳) و فاما (۱۹۶۵) نشان دادند در عمل، توزیع بـازدهی‌هـا دارای دم پهن‌تر و کشیدگی بیشتری نسبت به توزیع نرمال هستند. همچنـین محققـان دیگـری نظیر امبرچ، مک نیل و استرامن (۲۰۰۲)، هوسکینگ، بونتی و سیگل (۲۰۰۰) و مک‌نیل و فـری (۱۹۹۹) در مطالعات خود با استفاده از داده‌های مالی مختلف، به درستی این فرضـیه پـی بردنـد. این نتایج باعث شد که پژوهشگران بسیاری مدل‌هـای ارزش در معـرض ریسـک پرتفـوی را بـا فرض دم‌پهن بودن توزیع بازدهی‌ها و با رویکردهای مختلف معرفی کنند. لوپز و والتر (۲۰۰۰) در پژوهشی به تخمین ارزش در معرض ریسک به روش پارامتریک و با استفاده از ماتریس واریانس و کوواریانس پرداختند و توزیع بـازدهی دارایـی‌هـا را نرمـال و تـی اسـتیودنت در نظـر گرفتنـد. گلسرمن، هیدلبرگر و شهاب‌الدین (۲۰۰۲) با استفاده از یک روش تخمین درجۀ دوم و شبیه‌سازی مونت کارلو به تخمین ارزش در معرض ریسک پرداختند و توزیع بازدهی دارایی‌ها را نرمال و تی استیودنت در نظر گرفتند. کمدم (۲۰۰۵) به روش پارامتریک و با استفاده از مـاتریس واریـانس و کوواریانس، به برآورد ارزش در معرض ریسک پرداخت و توزیع بازدهی دارایی‌ها را نرمـال و تـی استیودنت در نظر گرفت. وی در پژوهش دیگری در سال ۲۰۰۹، به روش پارامتریک و با استفاده از مدل‌های گارچ، ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک دنباله‌ای[1] را بـرآورد کـرد. وی برآوردها را با دو فرض توزیع نرمال و تی استیودنت برای بازدهی دارایی‌ها انجام داد. مارتینز و یاو (۲۰۰۶) نیز به برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار با استفاده از مـدل‌هـای غیرخطی تئوری ارزش فرین پرداختند. آنها از توزیع‌های شرطی برای بازدهی دارایـی‌هـای مـالی استفاده کردند و در نهایت نیز به مقایسۀ رویۀ معرفی شده و انـواع قبلـی آن پرداختنـد. چلسـون (۲۰۱۳) در پژوهشی ریزش موردانتظار را با استفاده از مدل‌های خودرگرسـیونی و روش فراتـر از آستانه برآورد کرد. نتایج به‌دست آمده حاکی از آن است که برآوردها بیش از آن که تحـت تـأثیر مدل‌های خودرگرسیونی باشند، از توزیع درنظرگرفته شده برای بازده‌ها تأثیر می‌پذیرنـد و بـرآورد انجام شده با فرض توزیع تی اسـتیودنت بـه واقعیـت نزدیـک‌تـر اسـت. اُلسـن و وو (۲۰۱۳) در پژوهشی به بررسی عوامل مؤثر بر ناکارآمدی روش‌هـای تخمـین ارزش در معـرض ریسـک، در زمان بروز بحران مالی ۲۰۰۸ پرداختند. یکی از این عوامل دم پهن‌بودن توزیع بازدهی دارایی‌ها و تأثیر این مقادیر نسبتاً بزرگ بر تخمین ارزش در معرض ریسک است. آنها در این پژوهش نتـایج تخمین ارزش در معرض ریسک با فرض توزیع نرمال و توزیع لجسـتیک را بـا یکـدیگر مقایسـه کردند و دریافتند که در نظر گرفتن توزیع لجستیک، تخمین بهتـری بـه‌دسـت مـی‌دهـد. آسَـف

1. Tail value at risk

(۲۰۱۵) در پژوهشی به پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک در بازار کشورهای MENA پرداخت. وی در این پژوهش از مدل‌های آرچ نامتقارن برای پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک بهره برد و توزیع بازدهی دارایی‌ها را نرمال، نامتقارن و تـی اسـتیودنت درنظـر گرفـت. نتیجـهٔ مطالعـهٔ وی نشان‌دهندهٔ این است که در نظر گـرفتن توزیـع تـی اسـتیودنت، بـرآورد دقیـق‌تـری از ارزش در معرض ریسک به‌دست می‌دهد.

فلاح‌پور، رضوانی و رحیمی (۱۳۹۳) به برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی بـا اسـتفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی متقارن و غیرمتقارن در بازار نفت و طلا پرداختند. آنها از سه مدل گارچ، ای‌گارچ و تی‌گارچ برای برآورد استفاده کردند و تمام محاسـبات را نیـز بـا فـرض دو توزیع نرمال و تی استیودنت انجام دادند و در نهایت مدل‌ها را از نظر اعتبـار رتبـه‌بنـدی کردنـد. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد در هر دو بازار نفت و طلا، برآوردهای حاصـل از لحـاظ فـرض توزیع تی استیودنت در بازده دارایی‌ها، از اعتبار بیشتری برخوردار بوده و به واقعیت نزدیـک‌ترنـد. گرجی و سجاد (۱۳۹۴) به بـرآورد ارزش در معـرض ریسـک چنـد دوره‌ای بـرای شـاخص‌هـای TEPIX، NASDAQ و FTSE بر پایهٔ روش‌های شبیه‌سـازی و پارامتریـک پرداختنـد؛ نتـایج به‌دست آمده گویای این است که مدل شبیه‌سازی تاریخی بوت استرپ شده، بهترین عملکـرد را برای شاخص TEPIX دارد. همچنین در سطح اطمینان ۹۵ درصد مدل پارامتریک EGAECH با توزیع تی استیودنت و در سطوح اطمینان ۹۹ و ۹۹/۵ درصد مدل EGAECH با توزیع نرمـال، عملکرد مطلوب‌تری نسبت به سـایر مـدل‌هـا بـرای شـاخص‌هـای NASDAQ و FTSE دارد. فلاح‌پور و احمدی (۱۳۹۳) ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفـت و طـلا را بـا اسـتفاده از روش کاپیولاـ گارچ تخمین زدند و نتایج به‌دست آمده از روش یاد شده را بـا روش‌هـای سـنتی مقایسـه کردند؛ یافته‌های تجربی نشان می‌دهد روش کاپیولاـ گارچ ریسک پرتفوی را بـا دقـت بیشـتری تخمین می‌زند. رستمی نوروزآباد، شجاعی، خضری و رحمانی نوروزآباد (۱۳۹۳) بـا ترکیـب آنـالیز موجک و روش‌های گارچ، ارزش در معرض ریسک بازده بورس اوراق بهـادار تهـران را تخمـین زدند و نتیجهٔ آن را با روش‌های سنتی مقایسه کردند؛ نتایج تجربی حاکی از برتری روش پیشنهاد شده نسبت به روش‌های سنتی است.

در تمام منابع یاد شده، فرض بر این است که عوامل ریسک، عوامل واقعـی و شـناخته شـده هستند و بر پایهٔ همین فرض، نویسندگان روابطـی را بـرای محاسـبهٔ ارزش در معـرض ریسـک (VaR) و ریزش موردانتظار (ES) ارائه داده و همچنین روش‌هایی را نیز برای برآورد آن معرفـی کرده‌اند. اما در عمل، بازارهای مالی تحت تأثیر مشاهدات نادقیق، نارسـایی اطلاعـات و نظـرات خبرگان قرار می‌گیرند و به همین دلیل سبب افـزایش عـدم‌قطعیـت در ایـن بازارهـا مـی‌شـوند.

عدم‌قطعیت در عوامل ریسک دارای دو جزء مهم است: تصادفی بودن و ابهام داشتن. معرفی متغیر تصادفی فازی توسط کاکرناک (۱۹۷۸) و پوری و رالسکو (۱۹۸۶)، گام مؤثری در زمینهٔ رویارویی با این دو جزء مهم از عدم‌قطعیت در مدل‌سازی‌های مالی بود. متغیرهای تصادفی فازی، متغیرهای تصادفی‌ای هستند که مقادیر آنها اعداد فازی است (کاکرناک، ۱۹۷۸).

یوشیدا (۲۰۰۹) به برآورد ارزش در معرض ریسک در محیط فازی پرداخت. وی بازدهی دارایی‌ها را متغیر تصادفی فازی در نظر گرفت و از نظریهٔ امکان و الزام فازی برای اندازه‌گیری آنها استفاده کرد. همچنین موسی، کمدم و ترازا (۲۰۱۲ و ۲۰۱۴) و اسمیمو، بکتور و جاکوبی (۲۰۰۸) نیز در مطالعات خود از متغیر تصادفی فازی برای اندازه‌گیری ریسک پرتفوی استفاده کردند.

با بررسی مطالعات صورت گرفته در زمینهٔ برآورد دو سنجهٔ ریسک یاد شده، مشخص می‌شود که در پژوهش‌های گذشته به استفاده از نظریه‌های فازی و به‌طور مشخص متغیر تصادفی فازی در برآورد VaR و ES، توجه زیادی نشده است. از این رو، در پژوهش حاضر به معرفی معیارهای ریسک یاد شده با استفاده از متغیر تصادفی فازی تمرکز شده و مراحل برآورد آنها در بخش‌های بعدی به‌طور کامل توضیح داده شده است.

روش‌شناسی پژوهش

در این بخش به مرور و بررسی برخی مفاهیم پایه‌ای در زمینهٔ اعداد و متغیرهای فازی که در بخش‌های بعدی استفاده شده‌اند، پرداخته شده است و در ادامه رابطه‌ها و مدل‌های ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار در محیط فازی با فرض توزیع نرمال و تی استیودنت برای بازده دارایی‌ها معرفی می‌شوند.

اعداد فازی و نظریهٔ امکان و الزام فازی

تابع عضویت: فرض کنید X یک مجموعهٔ مرجع با اعداد حقیقی باشد که اعضای آن را با x نشان می‌دهند. هر زیرمجموعهٔ فازی A از X را با تابع عضویت $\mu_{\mathrm{A}}: \mathrm{X} \rightarrow [۰, ۱]$ تعریف می‌کنند که هر عضو x از X را به درجهٔ عضویت $\mu_A(x)$ مربوط می‌کند. هرگاه $\mu_A(x) = ۰$ ($\mu_A(x) = ۱$) باشد، می‌توان با قطعیت گفت که آن عضو به A تعلق ندارد (دارد) (زاده، ۱۹۶۵).

برش α: عناصر زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ فازی A که درجهٔ عضویت آنها حداقل به بزرگی α باشد ($\alpha > ۰$) را برش α گویند که با A_{α} و به‌صورت رابطهٔ ۱ نشان داده می‌شود.

رابطهٔ ۱) $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$

عدد فازی: عدد فازی $\tilde{A}$، زیرمجموعهٔ فازی از X با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}: X \to [۰,۱]$ بوده، هرگاه $\tilde{A}$ نرمال $(\exists x_۰ \in X | \mu_{\tilde{A}}(x_۰) = ۱)$ و محدب $\left(\forall x_۱, x_۲ \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\} \quad \forall \lambda \in [۰,۱]\right)$ باشد و همچنین μ_A از بالا پیوسته و کراندار باشد $\left(Sup(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(X) \geq ۰\}\right)$.

عدد فازی LR با نماد $\tilde{A} = \langle l, c, r \rangle_{LR}$ نمایش داده می‌شود که در آن $(c \in \mathcal{R})$ هسته و $(l, r \in \mathcal{R})$ کران چپ و راست عدد هستند و با تابع عضویت ارائه شده در رابطهٔ ۲ به نمایش درمی‌آید:

رابطهٔ ۲)
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{c-x}{l}\right) & c - l \leq x \leq c \\ R\left(\frac{x-c}{r}\right) & c \leq x \leq c + r \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

R و L توابع شکل راست و چپ و $L, R: \mathcal{R}^+ \to [۰,۱]$ توابع پیوسته و غیرافزایشی هستند؛ به‌طوری که $(L(۱) = R(۱) = ۰)$ و $(L(۰) = R(۰) = ۱)$. اگر این توابع با هم برابر باشند، عدد فازی LR را متقارن گویند و با $\tilde{A} = (c, \Delta)$ نمایش می‌دهند که Δ همان مرز چپ و راست بوده و $(l = r)$ است (زیمرمن، ۲۰۰۱).

اعداد فازی مثلثی، حالت خاصی از اعداد فازی است که اگر در آنها توابع شکل سمت راست و چپ، به صورت $R(x) =: L(x) =: \max\{۱ - x, ۰\}$ تعریف شوند، تابع عضویت آنها به صورت رابطهٔ ۳ خواهد بود.

رابطهٔ ۳)
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{c-x}{l} & c - l \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{r} & c \leq x \leq c + r \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

متغیر تصادفی فازی: فرض کنید $F_c(\mathcal{R})$، مجموعه‌ای شامل تمام زیرمجموعه‌های فازی نرمال و محدب از $\mathcal{R}$ و (Ω, A, P) گویای یک فضای احتمال باشد، تابع $\tilde{X}: \Omega \to F_c(\mathcal{R})$ را متغیر تصادفی فازی گویند، هرگاه به ازای هر $\alpha \in [۰,۱]$، برش α مجموعه‌ای فشرده و محدب باشد.

فرض کنید برش α مربوط به متغیر تصادفی $\widetilde{X}$ به‌صورت بازهٔ بسته $\widetilde{A}_\alpha^{+} := [\widetilde{A}_\alpha^{+}, \widetilde{A}_\alpha^{-}]$ نوشته شود و $\preccurlyeq$ بیان‌کنندهٔ رابطهٔ حداکثری میان اعداد فازی مجموعهٔ $F_c(\mathcal{R})$ باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_c(\mathcal{R})$ دو عدد فازی هستند؛ $\tilde{A} \succcurlyeq \tilde{B}$ به این معناست که برای تمام مقادیر $\alpha \in [۰,۱]$، $\widetilde{A}_\alpha^{-} \geq \widetilde{B}_\alpha^{-}$ و $\widetilde{A}_\alpha^{+} \geq \widetilde{B}_\alpha^{+}$ است. علاوه‌بر این، عملیات تفریق اعداد فازی و ضرب اسکالر آنها بر اساس اصل گسترش ارائه شده توسط پرفسور زاده به شرح زیر خواهد بود. حاصل عملیات جمع و تفریق $\left(\widetilde{A} \pm \widetilde{B}\right)$ برای دو عدد فازی $\tilde{A}, \tilde{B} \in F_c(\mathcal{R})$ و ضرب اسکالر $\xi\tilde{A}$ که در آن $\xi \in \mathcal{R}$ است، اعداد فازی خواهند بود که به‌کمک برش‌های آلفا اگر $(\xi \geq ۰)$ باشد، به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\left(\widetilde{A}+\widetilde{B}\right)_\alpha := \left[\widetilde{A}_\alpha^{-}+\widetilde{B}_\alpha^{-}, \widetilde{A}_\alpha^{+}+\widetilde{B}_\alpha^{+}\right]$$

$$\left(\widetilde{A}-\widetilde{b}\right)_\alpha := \left[\widetilde{A}_\alpha^{-}-\widetilde{B}_\alpha^{+}, \widetilde{A}_\alpha^{+}-\widetilde{B}_\alpha^{-}\right]$$

$$\left(\xi\widetilde{A}\right)_\alpha := \left[\xi\widetilde{A}_\alpha^{-}, \xi\widetilde{A}_\alpha^{+}\right]$$

بر اساس آنچه معرفی شد، نگاشت $\widetilde{X}: \Omega \to F_c(\mathcal{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود، اگر نگاشت‌های آن $\omega \to \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha^{-}(\omega)$ و $\omega \to \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha^{+}(\omega)$ برای تمام مقادیر $\alpha \in (۰,۱]$ قابل اندازه‌گیری باشند، به طوری که رابطهٔ زیر برقرار باشد (یوشیدا، ۲۰۰۹).

$$\widetilde{\mathcal{X}}_\alpha(\omega) = \left[\widetilde{\mathcal{X}}_\alpha^{-}(\omega), \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha^{+}(\omega)\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \widetilde{\mathcal{X}}(\omega)(x) \geq \alpha\right\}$$

نظریهٔ امکان و الزام فازی: نظریهٔ امکان، نظریه‌ای ریاضی در محیط فازی است که در واقع جایگزین نظریهٔ احتمال شده است. این نظریه برای اولین بار توسط پروفسور زاده در سال ۱۹۷۸ معرفی شد. به‌طور خلاصه محتوای این نظریه را می‌توان این گونه بیان کرد که در تحلیل پیشامدها و شرایط محیطی، تنها به دنبال رخدادهای محتمل نیستیم و در شرایط نامطمئن در پی یافتن تمام پیشامدهای امکان‌پذیری هستیم که با درجهٔ (اندازه) امکان این پیشامدها و نماد pos معرفی می‌شوند. در حالی که در نظریهٔ احتمالات، تنها از یک عدد (احتمال) برای توصیف میزان محتمل بودن وقوع یک پیشامد استفاده می‌شود؛ در نظریهٔ امکان، اندازهٔ دیگری به نام اندازهٔ الزام با نماد nec تعریف می‌شود که مزدوج اندازهٔ امکان است و میزان ضرورت برای هر مجموعهٔ $\tilde{A}$ را به‌صورت زیر برآورد می‌کند:

رابطهٔ ۴)

$$nec(\tilde{A}) = ۱ - pos(\overline{\tilde{A}})$$

که در آن $\overline{\tilde{A}}$ متمم مجموعهٔ $\tilde{A}$ است.

مطابق آنچه تعریف شد، فرض کنید $\tilde{A} \in F_c(\mathcal{R})$ یک عدد فازی باشد. معیار اندازه‌گیری $M_{\tilde{A}}$، اندازهٔ امکان و اندازهٔ الزام برای عدد فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\mathrm{I} \in F_c(\mathcal{R})$ برقرار باشد و همچنین معیار اندازه‌گیری $M_{\tilde{A}}$ در ویژگی‌های یک اندازهٔ فازی صدق کند (وانگ و کلیر، ۱۹۹۳).

رابطهٔ ۵) $$M_{\tilde{A}}^{P}(I) := \sup_{x \in I} \tilde{A}(x)$$

رابطهٔ ۶) $$M_{\tilde{A}}^{N}(I) := 1 - \sup_{x \notin I} \tilde{A}(x)$$

ارزش در معرض ریسک (VaR) و ریزش مورد انتظار (ES) با فرض بیضوی بودن توزیع بازدهی‌ها

فرض کنید پرتفویی متشکل از n دارایی با بازده‌های قطعی $R^i, i = 1,..,n$ و وزن‌های $w_i, i = 1,..,n$ داریم. اگر ارزش پرتفوی در زمان t برابر با $\Pi(t)$ باشد، در این‌صورت سود یا زیان پرتفوی در افق زمانی $[0, t]$ برابر است با:

رابطهٔ ۷) $$\Delta\Pi(t) = \Pi(t) - \Pi(0) = w_1 R_t^1 + w_2 R_t^2 + \ldots + w_n R_t^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

ارزش در معرض ریسک با سطح اطمینان θ- ۱ و یا سطح ریسک θ برابر است با:

رابطهٔ ۸) $$P\{\Delta\Pi(t) < -VaR_\theta\} = \theta$$

همان‌طور که گفته شد ارزش در معرض ریسک معیار منسجمی نیست و اطلاعاتی دربارهٔ میزان زیان مورد انتظار به‌دست نمی‌دهد. برای رفع این مشکل آرتزنر و همکارانش (۱۹۹۷) ریزش مورد انتظار را معرفی کردند.

رابطهٔ ۹) $$ES_\theta = \mathrm{E}[-\Delta\Pi \mid -\Delta\Pi > VaR_\theta]$$

فرض کنید $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ دارای توزیع بیضوی با میانگین $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$، ماتریس کوواریانس $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ که در آن $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(R_i, R_j)$ و با تابع چگالی مولد g باشد:

رابطهٔ ۱۰) $$R \sim \aleph(\mu, \Sigma, g)$$

تابع چگالی R در صورت وجود، به‌صورت رابطهٔ ۱۱ است.

رابطهٔ (۱۱)
$$f_R(r)=\frac{c_n}{\sqrt{|\Sigma|}}\,g\left[\frac{۱}{۲}(r-\mu)^T\sum{}^{-۱}(r-\mu)\right]$$

که در آن $|\Sigma|$ دترمینان ماتریس واریانس و کوواریانس است. همچنین داریم (کِلر، ۱۹۷۰؛ فانگ، کای ـ تای، کوتز و کای ـ وانگ، ۱۹۸۷):

رابطهٔ (۱۲)
$$\int_{۰}^{+\infty}u^{\frac{n-۱}{۲}}g(u)du<\infty$$

رابطهٔ (۱۳)
$$c_n=\frac{\Gamma(n/۲)}{(۲\pi)^{n/۲}}\left[\int_{۰}^{+\infty}u^{\frac{n-۱}{۲}}g(u)du\right]^{-۱}$$

با توجه به آنچه تعریف شد، کَمدِم (۲۰۰۵) رابطهٔ ۱۴ را برای ارزش در معرض ریسک پرتفوی، با فرض بیضوی بودن توزیع بازدهی دارایی‌ها، ارائه کرده است:

رابطهٔ (۱۴)
$$VaR_\theta=\sum_{i=۱}^{n}w_i\mu_i+q_{\theta,n}^{g}\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}w_iw_j\sigma_{ij}}$$

وی همچنین رابطهٔ ۱۵ را برای ریزش مورد انتظار پرتفوی ارائه کرده است:

رابطهٔ (۱۵)
$$ES_\theta=\sum_{i=1}^{n}w_i\mu_i+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij}}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\theta.\Gamma(\frac{n+1}{2})}\cdot\int_{q_{\theta,n}^{g}}^{\infty}(u-(q_{\theta,n}^{g})^2)^{\frac{n-1}{2}}g(u)du$$

که در آن $\Gamma(u)=\int_{۰}^{+\infty}t^{u-۱}\exp(-t)dt\ ,u\in(۰,+\infty)$ بوده و $q_\theta=q_{\theta,n}^{g}$ جواب منحصر به فرد رابطهٔ ۱۶ است.

رابطهٔ (۱۶)
$$\theta=\frac{\pi^{\frac{n-۱}{۲}}}{\Gamma(\frac{n-۱}{۲})}\int_{q_\theta}^{-\infty}\int_{z^۲}^{+\infty}(u-z^۲)^{\frac{n-۳}{۲}}g(u)du\,dz\,.$$

در این پژوهش از دو توزیع بیضویِ نرمال و تی استیودنت استفاده شده است؛ از این رو بر پایهٔ این دو فرض و با استفاده از مقدمات ارائه شده، روابط ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار فازی در ذیل بحث خواهد شد.

برآورد VaR و ES با فرض توزیع تی استیودنت

فرض کنید R_{it} بازده دارایی iام در زمان t باشد؛ همان‌طور که گفته شد این بازده دارای عدم قطعیت است، بنابراین فرض کنید $\tilde{R}_{it}$ بازده غیرقطعی دارایی i بوده و یک عدد فازی مثلثی متقارن است. هستهٔ این عدد فازی R_{it} و فاکتور عدم قطعیت (کران چپ و راست) c_{it} است $\left(\tilde{R}_{it} = (R_{it}\ , c_{it})\right)$؛ شایان ذکر است که عوامل ریسک پرتفوی (بازده دارایی‌های پرتفوی) و به‌طور مشخص فاکتور عدم قطعیت، غیرتصادفی است. در این‌صورت بازده غیرقطعی پرتفویی متشکل از n دارایی با بازده‌های غیرقطعی $\hat{R}_{it}$ و وزن‌های w_{i} به‌صورت رابطهٔ ۱۷ خواهد بود.

$$\Delta\widetilde{\Pi}_t = w_1 \widetilde{R}_{1t} + w_2 \widetilde{R}_{2t} + \ldots + w_n \widetilde{R}_{nt}$$ رابطهٔ ۱۷)

یوشیدا (۲۰۰۹) ابتدا با استفاده از نظریهٔ امکان و الزام فازی، مقادیر میانگین و واریانس پرتفوی را به‌دست آورد، سپس با استفاده از رابطهٔ ۱۴ ارزش در معرض ریسک را با فرض نرمال بودن بازده دارایی‌ها به‌صورت رابطهٔ ۱۸ معرفی کرد؛ ارزش در معرض ریسک پرتفوی با بازده $\Delta\widetilde{\Pi}_t$ و با سطح ریسک θ به‌صورت رابطهٔ ۱۸ است.

$$VaR_\theta^{PN} = \sum_{i=1}^{n} w_i\,(\mu_i - \frac{2}{3}c_i) + q_{1-\theta}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\,(\sigma_{ij} + c_i c_j)}$$ رابطهٔ ۱۸)

که در آن $q_{1-\theta}$ چارک $(1-\theta)$ توزیع نرمال است.

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، داده‌های مالی اغلب دارای توزیع غیرنرمال بوده و دارای کشیدگی بیشتر و دم پهن‌تری نسبت به توزیع نرمال هستند. بنابراین با فرض توزیع t برای بازده دارایی‌ها، ارزش در معرض ریسک برابر با رابطهٔ ۱۹ خواهد بود.

$$VaR_\theta^{PN} = \sum_{i=1}^{n} w_i\,(\mu_i - \frac{2}{3}c_i) + q_{1-\theta}^{v}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\,\left(\sigma_{ij} + c_i c_j\right)}$$ رابطهٔ ۱۹)

که در آن $q_{1-\theta}^{\upsilon}$ چارک $(1-\theta)$ توزیع t با درجهٔ آزادی υ است. با استفاده از رابطهٔ ۱۵ و مقادیر بازده و ریسک برآورد شده توسط یوشیدا (۲۰۰۹)، ریزش موردانتظار نرمال به کمک رابطهٔ ۲۰ برآورد خواهد شد.

رابطهٔ ۲۰)
$$ES_{\theta}^{PN}=\sum_{i=1}^{n}w_{i}(\mu_{i}-\frac{2}{3}c_{i})+k_{\theta}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{i}w_{j}(\sigma_{ij}+c_{i}c_{j})}$$

$$\left(k_{\theta}=\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(q\theta)^{2}}{2}\right)\right)$$

با فرض توزیع t برای بازده دارایی‌ها، به‌منظور برآورد ریزش موردانتظار می‌توان از رابطهٔ ۲۱ استفاده کرد.

رابطهٔ ۲۱)
$$ES_{\theta}^{PN}=\sum_{i=1}^{n}w_{i}(\mu_{i}-\frac{2}{3}c_{i})+k_{\theta,\nu}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{i}w_{j}(\sigma_{ij}+c_{i}c_{j})}$$

$$\left(k_{\theta,\upsilon}=\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)}{\theta\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\times\upsilon^{\frac{\upsilon}{2}}\times\left(\left(q_{\theta,\upsilon}\right)^{2}+\upsilon\right)^{\frac{-(\upsilon-1)}{2}}\right)$$

که در آن υ درجهٔ آزادی توزیع t است.

برآورد VaR و ES با استفاده از نظریه امکان و الزام با لحاظ تصادفی بودن عوامل ریسک

در این بخش، بر اساس پژوهش موسی و همکارانش (۲۰۱۴)، VaR و ES را در حالتی که عوامل ریسک پرتفوی متغیر تصادفی است، معرفی کرده و از تعریف پوری و رالسکو (۱۹۸۶) برای متغیر تصادفی فازی، استفاده می‌شود. در شرایطی که عوامل ریسک پرتفوی و به‌طور مشخص فاکتور عدم قطعیت متغیر تصادفی هستند، یک حد بالا (μ) و یک حد پایین (l) برای متغیرهای فازی تعیین می‌شود. فرض کنید $\Delta\widetilde{\Pi}(t)$ بازده غیرقطعی پرتفوی در زمان t است و کران بالا و پایین بازده، براساس برش α تعیین شدهٔ سرمایه‌گذار با $\Delta\Pi_{\alpha}^{\mu}$ و $\Delta\Pi_{\alpha}^{l}$ نشان داده می‌شود. در این صورت VaR نیز براساس $\alpha\in[0,1]$ و در سطح ریسک θ، دارای دو کران بالا و

پایین خواهد بود $\left(VaR_\theta^\alpha = \left\{\mathrm{VaR}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^l\right), \mathrm{VaR}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^u\right)\right\}\right)$ که به‌صورت رابطه‌های ۲۲ و ۲۳ تعریف می‌شوند.

رابطهٔ ۲۲)
$$P\left\{\Delta\Pi_\alpha^l < -\mathrm{VaR}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^l\right)\right\} = \theta$$

رابطهٔ ۲۳)
$$P\left\{\Delta\Pi_\alpha^u < -\mathrm{VaR}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^u\right)\right\} = \theta$$

بر همین اساس سنجهٔ ریسک ES نیز دارای دو کران بالا و پایین خواهد بود $\left(ES_\theta^\alpha = \left\{\mathrm{ES}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^l\right), \mathrm{ES}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^u\right)\right\}\right)$ که به‌صورت رابطه‌های ۲۴ و ۲۵ تعریف می‌شوند.

رابطهٔ ۲۴)
$$ES_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^l\right) = E\left[-\Delta\Pi_\alpha^l \middle| -\Delta\Pi > VaR_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^l\right)\right]$$

رابطهٔ ۲۵)
$$ES_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^u\right) = E\left[-\Delta\Pi_\alpha^u \middle| -\Delta\Pi > VaR_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^u\right)\right]$$

حدود به‌دست آمده برای دو سنجهٔ VaR و ES را می‌توان به‌عنوان مقادیر خوش‌بینانه و بدبینانه برای این معیارهای ریسک تفسیر کرد. بنابراین سرمایه‌گذار با پذیرفتن سطح خاصی از عدم قطعیت (به ازای یک مقدار مشخص برای α)، می‌تواند ریسک پرتفوی خود را تخمین زده و بر اساس مقادیر خوش‌بینانه و بدبینانهٔ به‌دست آمده (حد پایین ریسک و حد بالای ریسک)، تصمیم‌گیری کند. در حالتی که (α = ۱) باشد، عدم‌قطعیتی وجود ندارد، بنابراین فقط یک مقدار برای VaR و ES به‌دست می‌آید. همچنین در حالت (α = ۰)، بدبینانه‌ترین و خوش‌بینانه‌ترین حالت برای VaR و ES پرتفوی اتفاق می‌افتد.

فرض کنید پرتفویی متشکل از n دارایی ریسکی با بازده‌هایی به‌صورت اعداد فازی مثلثی متقارن با تابع شکل L داریم $\left(\tilde{R}_i = (R_i, c_i)\right)$؛ اگر بازده غیرقطعی پرتفوی را با $\Delta\tilde{\Pi}$ نشان دهیم، برای مقدار مشخص $\alpha \in [۰, ۱]$، کران پایین و بالای بازده پرتفوی به‌کمک رابطه‌های ۲۶ و ۲۷ به‌دست خواهد آمد.

رابطهٔ ۲۶)
$$\Delta\Pi_\alpha^l = \sum_{i=1}^{n} w_i\left(R_i - L^{-1}(\alpha)c_i\right)$$

رابطهٔ ۲۷)
$$\Delta\Pi_\alpha^u = \sum_{i=1}^{n} w_i\left(R_i + L^{-1}(\alpha)c_i\right)$$

با فرض $R \sim \aleph(\mu, \Sigma_R, g)$ و $C \sim \aleph(\nu, \Sigma_C, g)$، خواهیم داشت (موسی و همکاران، ۲۰۱۴):

$$R-L^{-1}(\alpha)C=(R_1-L^{-1}(\alpha)c_1,\dots,R_n-L^{-1}(\alpha)c_n)\sim\aleph(\mu-L^{-1}(\alpha)\nu,\underline{\Sigma},g)$$ رابطهٔ ۲۸)

$$R+L^{-1}(\alpha)C=(R_1+L^{-1}(\alpha)c_1,\dots,R_n+L^{-1}(\alpha)c_n)\sim\aleph(\mu+L^{-1}(\alpha)\nu,\overline{\Sigma},g)$$ رابطهٔ ۲۹)

که در آن،

$$\underline{\Sigma}=\sum_R-L^{-1}(\alpha)(\sum_{RC}+\sum_{RC}^t)+(L^{-1}(\alpha))^2\sum_C$$ رابطهٔ ۳۰)

$$\overline{\Sigma}=\Sigma_R+L^{-1}(\alpha)(\Sigma_{RC}+\Sigma_{RC}^t)+\left(L^{-1}(\alpha)\right)^2\Sigma_C\,.$$ رابطهٔ ۳۱)

$$\sum_{RC}=\left(\mathrm{cov}\left[R_i,c_j\right]\right)_{1\le i,j\le n}$$

حال اگر $\Delta\tilde{\Pi}=w_1\tilde{R}_1+w_2\tilde{R}_2+\dots+w_n\tilde{R}_n$ را بازده غیرقطعی پرتفوی در نظر بگیریم که در آن $\left(\tilde{R}_i=(R_i,c_i)\right)$ و توزیع آن برای بازده دارایی‌ها، توزیع نرمال باشد $\left(C\sim N\left(\mathrm{v},\sum_C\right),R\sim N\left(\mu,\sum_R\right)\right)$؛ برش α تعیین‌شدهٔ سرمایه‌گذار، کران بالا و پایین VaR پرتفوی در سطح اطمینان $(1-\theta)$، به‌صورت رابطه‌های ۳۲ و ۳۳ برآورد خواهد شد.

$$\mathrm{VaR}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^l\right)=\sum_{i=1}^n w_i\left(\mu_i-L^{-1}(\alpha)\nu_i\right)+q_{1-\theta}\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n w_iw_j\underline{\sigma}_{ij}}$$ رابطهٔ ۳۲)

$$\mathrm{VaR}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^u\right)=\sum_{i=1}^n w_i\left(\mu_i+L^{-1}(\alpha)\nu_i\right)+q_{1-\theta}\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n w_iw_j\overline{\sigma}_{ij}}$$ رابطهٔ ۳۳)

که در آن پارامترهای $\underline{\sigma}_{ij}$ و $\overline{\sigma}_{ij}$ با استفاده از رابطه‌های ۳۴ و ۳۵ محاسبه می‌شوند.

$$\underline{\sigma}_{ij}=cov\left(R_i,R_j\right)-L^{-1}(\alpha)\left(cov\left(R_i,c_j\right)+cov\left(R_j,R_i\right)\right)+\left(L^{-1}(\alpha)\right)^2cov\left(c_i,c_j\right)$$ رابطهٔ ۳۴)

$$\overline{\sigma}_{ij}=cov\left(R_i,R_j\right)+L^{-1}(\alpha)\left(cov\left(R_i,c_j\right)+cov\left(R_j,R_i\right)\right)+\left(L^{-1}(\alpha)\right)^2cov\left(c_i,c_j\right)$$ رابطهٔ ۳۵)

با در نظر گرفتن مفروضات فوق، سنجهٔ ES پرتفوی نیز به‌کمک رابطه‌های ۳۶ و ۳۷ برآورد می‌شود.

$$\mathrm{ES}_\theta\left(\Delta\Pi_\alpha^l\right)=\sum_{i=1}^n w_i\left(\mu_i-L^{-1}(\alpha)\nu_i\right)+k_\theta\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n w_iw_j\underline{\sigma}_{ij}}$$ رابطهٔ ۳۶)

$$\mathrm{ES}_{\theta}\left(\Delta\Pi_{\alpha}^{u}\right)=\sum_{i=1}^{n}w_{i}\left(\mu_{i}+L^{-1}(\alpha)\nu_{i}\right)+k_{\theta}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{i}w_{j}\overline{\sigma}_{ij}}$$ رابطهٔ ۳۷)

$$\left(k_{\theta}=\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(q\theta)^{2}}{2}\right)\right)$$

حـال بـا فـرض توزیـع t بـرای بـازده دارایـی‌هـا یـا بـه بیـان دیگـر $R\sim T(\mu,\sum_R,\upsilon)$ و $C\sim T(\mathrm{v},\sum_C,\upsilon)$، حد بالا و پایین سنجهٔ VaR پرتفوی در سطح اطمینـان$(1-\theta)$، بـه‌صـورت رابطه‌های ۳۸ و ۳۹ برآورد خواهد شد.

$$\mathrm{VaR}_{\theta}\left(\Delta\Pi_{\alpha}^{l}\right)=\sum_{i=1}^{n}w_{i}\left(\mu_{i}-L^{-1}(\alpha)\nu_{i}\right)+q_{1-\theta}^{\upsilon}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{i}w_{j}\underline{\sigma}_{ij}}$$ رابطهٔ ۳۸)

$$\mathrm{VaR}_{\theta}\left(\Delta\Pi_{\alpha}^{u}\right)=\sum_{i=1}^{n}w_{i}\left(\mu_{i}+L^{-1}(\alpha)\nu_{i}\right)+q_{1-\theta}^{\upsilon}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{i}w_{j}\overline{\sigma}_{ij}}$$ رابطهٔ ۳۹)

به‌منظور برآورد کران‌های سنجهٔ ES نیز می‌توان از رابطه‌های ۴۰ و ۴۱ بهره بـرد (موسـی و همکاران، ۲۰۱۴).

$$\mathrm{ES}_{\theta}\left(\Delta\Pi_{\alpha}^{l}\right)=\sum_{i=1}^{n}w_{i}\left(\mu_{i}-L^{-1}(\alpha)\nu_{i}\right)+k_{\theta,\upsilon}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{i}w_{j}\underline{\sigma}_{ij}}$$ رابطهٔ ۴۰)

$$\mathrm{ES}_{\theta}\left(\Delta\Pi_{\alpha}^{l}\right)=\sum_{i=1}^{n}w_{i}\left(\mu_{i}+L^{-1}(\alpha)\nu_{i}\right)+k_{\theta,\upsilon}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{i}w_{j}\overline{\sigma}_{ij}}$$ رابطهٔ ۴۱)

$$\left(k_{\theta,\upsilon}=\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)}{\theta\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\times\upsilon^{\frac{\upsilon}{2}}\times\left(\left(q_{\theta,\upsilon}\right)^{2}+\upsilon\right)^{\frac{-(\upsilon-1)}{2}}\right)$$

یافته‌های پژوهش

در این بخش پس از برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش موردانتظار برای بازدهی دو پرتفوی با استفاده از نظریهٔ امکان و الزام فازی، برای عوامل ریسک پرتفوی دو حالت ثابت و تصادفی در

نظر گرفته شده است. پرتفوی‌های یاد شده، هر یک شامل ۱۰ سهم هستند که از بین سهام ۵۰ شرکت فعال‌تر بازار بورس اوراق بهادار تهران انتخاب شده‌اند. شایان ذکر است که علاوه بر قدرت بالای نقدشوندگی سهام شرکت‌های یاد شده، حجم معاملات و میزان تأثیرگذاری آنها بر بازار نیز، از جمله عوامل کلیدی در انتخاب این سهم‌ها بوده است. داده‌های استفاده‌شده، داده‌های روزانهٔ مربوط به قیمت پایانی سهام به مدت دو سال (از ابتدای سال ۹۳ تا پایان سال ۹۴) است و طول دورهٔ در نظر گرفته شده برای به‌دست آوردن فاکتور عدم قطعیت (فاکتور فازی) به‌صورت ماهانه است. در این پژوهش فاکتور عدم قطعیت برای بازدهی هر سهم، انحراف معیار بازدهی‌های سهام در دوره‌ها در نظر گرفته شده و تمام محاسبه‌ها با فرض دو توزیع نرمال و تی استیودنت برای بازدهی پرتفوی‌ها انجام شده است. برای به‌دست آوردن فاکتور فازی، بازهٔ زمانی مد نظر را به زیربازه‌هایی با طول یک ماه طبقه‌بندی کرده و انحراف معیار بازدهی سهام را در طول این زیربازه به‌دست می‌آوریم. بازده استفاده‌شده در تحقیق، بازده ماهانهٔ لگاریتمی به‌صورت $log\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)$ تعریف شده است که در آن x_t قیمت پایانی سهم در ماه tام است. محاسبه‌ها در نرم‌افزارهای اکسل و ایویوز انجام گرفته است. سهم‌های تشکیل‌دهندهٔ دو پرتفوی در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

جدول ۱. سهام منتخب موجود در پرتفوی‌های بررسی‌شده

پرتفوی	نام سهام									
۱	خبهمن	خپارس	خودرو	رانفور	رمپنا	فاذر	فملی	وبملت	وغدیر	ونفت
۲	خساپا	تاپیکو	تایرا	اخابر	فارس	فولاد	کگل	همراه	وبصادر	وپاسار

جدول ۲ ویژگی‌های آماری پرتفوی‌های بررسی‌شده را نشان می‌دهد؛ همان‌طور که مشاهده می‌شود هر دو پرتفوی دارای کشیدگی و چولگی متفاوت نسبت به توزیع نرمال هستند. از مقایسهٔ مقادیر به‌دست آمده برای دو معیار میانگین و واریانس، مشخص است که پرتفوی ۱ بازدهی بیشتر و به‌طبع ریسک بیشتری را نیز برای سرمایه‌گذار به دنبال خواهد داشت.

جدول ۲. ویژگی‌های آماری پرتفوی‌های مورد بررسی

پرتفوی	میانگین	واریانس	چولگی	کشیدگی
۱	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۰۰۸	-۰/۸۳	۲/۷
۲	-۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۰۶	۰/۲۵	۱/۶

جدول ۳ برآورد VaR فازی را تحت دو فرض توزیع نرمال و توزیع t برای بازده دارایی‌ها، در حالت ثابت بودن عوامل ریسک (ثابت بودن فاکتور عدم‌قطعیت) نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، از آنجا که پرتفوی ۱ ریسک بیشتری دارد، از سنجهٔ VaR بزرگ‌تری نسبت به پرتفوی ۲ برخوردار است.

جدول ۳. برآورد VaR در حالت ثابت بودن فاکتور عدم قطعیت

	توزیع نرمال			توزیع تی استیودنت		
سطح اطمینان θ −۱ / پرتفوی	٪۹۹	٪۹۷/۵	٪۹۵	٪۹۹	٪۹۷/۵	٪۹۵
۱	٪۱۱/۸۴	٪۹/۴۶	٪۷/۴۱	٪۱۵	٪۱۱/۴	٪۸/۶۵
۲	٪۷/۷	٪۶/۱	٪۴/۶۶	٪۹/۸۵	٪۷/۴	٪۵/۵۱

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در جدول ۳، می‌توان دریافت که فرض توزیع t برای بازده دارایی‌ها سبب ایجاد برآوردهای محافظه‌کارانه‌تری برای سنجهٔ مورد بررسی در هر سطح اطمینان می‌شود. برای مثال، در پرتفوی ۱، میزان VaR پرتفوی در طول یک ماه و در سطح اطمینان ۹۹ درصد با فرض دو توزیع نرمال و تی استیودنت به‌ترتیب برابر ۱۱/۸۴ و ۱۵ درصد به‌دست آمده که گواهی بر برآوردهای سخت‌گیرانه‌تر توسط توزیع t است.

جدول ۴ برآورد سنجهٔ ریزش موردانتظار را تحت دو فرض توزیع نرمال و توزیع t برای بازده دارایی‌های هر دو پرتفوی، در حالت ثابت بودن فاکتور عدم قطعیت نشان می‌دهد. بر اساس نتایج جدول، سنجهٔ مد نظر در پرتفوی ۱ به‌دلیل داشتن ریسک بیشتر، مقدار بزرگ‌تری را اختیار کرده است.

جدول ٤. برآورد ES در حالت ثابت بودن فاکتور عدم‌قطعیت

	توزیع نرمال			توزیع t		
سطح اطمینان θ −۱ / پرتفوی	٪۹۹	٪۹۷/۵	٪۹۵	٪۹۹	٪۹۷/۵	٪۹۵
۱	٪۱۳/۸۳	٪۱۱/۹	٪۱۰/۲۳	٪۴۱/۳	٪۳۴	٪۲۸/۴
۲	٪۹/۰۵	٪۷/۷۴	٪۶/۶	٪۲۷/۸۵	٪۲۲/۸	٪۱۹/۰۳

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در جدول ۴، در صورت وقوع ریسک برای پرتفوی ۱، با فرض توزیع نرمال و در سطح اطمینان ۹۹ درصد، به‌طور متوسط انتظار می‌رود ۱۳/۸۳ درصد از ارزش

پرتفوی کاسته شود، در حالی که با فرض توزیع t، این مقدار برابر ۴۱/۳ درصد است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نظر گرفتن توزیع t برای بازده دارایی‌ها در هر دو پرتفوی و تحت هر سطح اطمینان مشخص، موجب دستیابی به برآوردهایی محافظه‌کارانه‌تر می‌شود.

نتایج برآورد VaR فازی، با در نظر گرفتن توزیع نرمال برای بازده دارایی‌ها، در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت، در جدول ۵ ارائه شده است.

جدول ۵. برآورد VaR نرمال در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم‌قطعیت

پرتفوی	سطح عدم قطعیت (α)	سطح اطمینان θ -۱					
		٪۹۹		٪۹۷/۵		٪۹۵	
		حد پایین VaR	حد بالای VaR	حد پایین VaR	حد بالای VaR	حد پایین VaR	حد بالای VaR
۱	۰	٪۹/۸۵	٪۹/۸۵	٪۷/۸۳	٪۷/۸۳	٪۶/۱۰	٪۶/۱۰
	۰/۵	٪۵/۹۱	٪۱۱/۲۱	٪۴/۹۷	٪۹/۵۷	٪۴/۱۵	٪۸/۱۵
	۱	٪۲/۶۸	٪۱۳/۲۸	٪۱/۸۳	٪۱۱/۳۷	٪۱/۲۰	٪۹/۷۳
۲	۰	٪۵/۹۰	٪۵/۹۰	٪۴/۹۰	٪۴/۹۰	٪۳/۳۲	٪۳/۳۲
	۰/۵	٪۳/۵۲	٪۷/۰۶	٪۲/۹۰	٪۵/۹۷	٪۲/۳۶	٪۵/۰۴
	۱	٪۱/۲۳	٪۸/۴۶	٪۱/۰۴	٪۷/۲۰	٪۰/۸۵	٪۶/۱۱

با توجه به جدول ۵، در حالتی که سطح عدم قطعیت صفر است (۰ = α) حدود بالا و پایین به‌دست آمده برای سنجۀ ارزش در معرض ریسک با هم برابرند و یک مقدار را نشان می‌دهند؛ اما در صورتی که سطح عدم قطعیت ۱ باشد (۱ = α)، خوش‌بینانه‌ترین و بدبینانه‌ترین حالت برای VaR به‌دست می‌آید که خوش‌بینانه‌ترین حالت (حد پایین) مقدار ارزش در معرض ریسک را کمتر از واقع و بدبینانه‌ترین حالت (حد بالا) مقدار VaR را بیشتر از واقع تخمین می‌زنند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در سطح اطمینان ۹۹ درصد و در سطح عدم قطعیت صفر، حدود پایین و بالا برای سنجۀ VaR در پرتفوی ۱، به‌ترتیب برابر ۹/۸۵ و ۹/۸۵ درصد و در سطح عدم قطعیت یک نیز، به‌ترتیب برابر با ۲/۶۸ و ۱۳/۲۸ درصد به‌دست آمده است. در نتیجه سرمایه‌گذار با پذیرفتن سطح خاصی از عدم قطعیت، می‌تواند ریسک پرتفوی خود را تخمین زده و بر اساس آن تصمیم‌گیری کند.

جدول ۶ نتایج برآورد VaR فازی را با در نظر گرفتن توزیع t برای بازده دارایی‌ها، در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت نشان می‌دهد.

جدول ٦. برآورد VaR با فرض توزیع t در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت

پرتفوی	سطح عدم قطعیت (α)	سطح اطمینان $1-\theta$					
		٪۹۹		٪۹۷/۵		٪۹۵	
		حدپایین VaR	حد بالای VaR	حدپایین VaR	حد بالای VaR	حدپایین VaR	حد بالای VaR
۱	۰	٪۱۴/۱۰	٪۱۴/۱۰	٪۱۰/۲۳	٪۱۰/۲۳	٪۷/۹۰	٪۷/۹۰
	۰/۵	٪۷/۱۶	٪۱۳/۳۹	٪۵/۷۴	٪۱۰/۹۱	٪۴/۶۵	٪۹
	۱	٪۳/۱۱	٪۱۵/۸۰	٪۲/۳۵	٪۱۲/۹۲	٪۱/۸۴	٪۱۰/۷۰
۲	۰	٪۸/۴۱	٪۸/۴۱	٪۶/۶۴	٪۶/۶۴	٪۴/۹۰	٪۴/۹۰
	۰/۵	٪۴/۳۴	٪۸/۵۰	٪۳/۴۰	٪۶/۸۶	٪۲/۶۸	٪۵/۶۰
	۱	٪۱	٪۱۰/۱۳	٪۰/۷۴	٪۸/۲۳	٪۰/۶۰	٪۶/۷۷

در جدول ۶ و در سطح عدم قطعیت صفر، حدود به‌دست آمده برای سنجهٔ VaR با هم برابرند و در سطح عدم‌قطعیت یک، این حدود که بیان‌کنندهٔ مقادیر خوش‌بینانه (کمتر از واقع) و بدبینانه (بیشتر از واقع) برای سنجهٔ مد نظر هستند، مقادیر متفاوتی را اختیار کرده‌اند.

در جدول ۷، نتایج برآورد ریزش موردانتظار فازی با لحاظ توزیع نرمال برای بازده دارایی‌ها، در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت ارائه شده است.

جدول ۷. برآورد ES نرمال در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت

پرتفوی	سطح عدم قطعیت (α)	سطح اطمینان $1-\theta$					
		٪۹۹		٪۹۷/۵		٪۹۵	
		حدپایین ES	حد بالای ES	حدپایین ES	حد بالای ES	حدپایین ES	حد بالای ES
۱	۰	٪۱۱/۲۳	٪۱۱/۲۳	٪۱۰/۶۵	٪۱۰/۶۵	٪۹/۰۸	٪۹/۰۸
	۰/۵	٪۶/۷۰	٪۱۲/۶۰	٪۵/۹۴	٪۱۱/۲۶	٪۵/۲۷	٪۱۰/۱۰
	۱	٪۲/۷۴	٪۱۴/۸۷	٪۲/۴۵	٪۱۳/۳۳	٪۲/۰۳	٪۱۲
۲	۰	٪۷/۵۳	٪۷/۵۳	٪۵/۹۰	٪۵/۹۰	٪۵/۲۰	٪۵/۲۰
	۰/۵	٪۴/۰۴	٪۷/۹۷	٪۳/۵۳	٪۷/۰۹	٪۳/۱۰	٪۶/۳۳
	۱	٪۰/۹۸	٪۹/۵۱	٪۰/۸۳	٪۸/۵۰	٪۰/۶۵	٪۷/۶۱

نتایج جدول ۷ نشان می‌دهد در حالتی که سطح عدم قطعیت صفر باشد ($\alpha = ۰$) حدود بالا و پایین به‌دست آمده برای سنجهٔ ES با هم برابرند، اما در صورتی که سطح عدم قطعیت برابر با ۱ باشد ($\alpha = ۱$)، خوش‌بینانه‌ترین و بدبینانه‌ترین حالت برای ES به‌دست می‌آید که خوش‌بینانه‌ترین حالت (حد پایین) مقدار ریزش موردانتظار را کمتر از واقع و بدبینانه‌ترین حالت (حد بالا) مقدار ES را بیشتر از واقع برآورد می‌کند. همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌شود، در سطح اطمینان ۹۹ درصد و در سطح عدم قطعیت صفر، حدود پایین و بالا برای سنجهٔ ریزش موردانتظار در پرتفوی ۱، به‌ترتیب برابر ۱۱/۲۳ و ۱۱/۲۳ درصد و در سطح عدم قطعیت یک نیز، به‌ترتیب برابر با ۲/۷۴ و ۱۴/۸۷ درصد به‌دست آمده است.

نتایج برآورد ریزش موردانتظار فازی تحت توزیع t برای بازده دارایی‌ها، در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت در جدول ۸ به‌صورت خلاصه ارائه شده است.

جدول ۸. برآورد ES با فرض توزیع t در حالت تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت

پرتفوی	سطح عدم قطعیت (α)	سطح اطمینان $\theta - ۱$					
		٪۹۹		٪۹۷/۵		٪۹۵	
		حدپایین ES	حد بالای ES	حدپایین ES	حد بالای ES	حدپایین ES	حد بالای ES
۱	۰	٪۲۶/۹۰	٪۲۶/۹۰	٪۲۳/۲۰	٪۲۳/۲۰	٪۱۹/۸۰	٪۱۹/۸۰
	۰/۵	٪۱۷/۶۰	٪۳۱/۶۱	٪۱۴/۶۶	٪۲۶/۵۰	٪۱۲/۴۸	٪۲۲/۶۸
	۱	٪۷/۸۸	٪۳۷	٪۶/۴۳	٪۳۰/۹۶	٪۵/۹۱	٪۲۶/۵۴
۲	۰	٪۱۸/۴۰	٪۱۸/۴۰	٪۱۶/۲۰	٪۱۶/۲۰	٪۱۲/۸۰	٪۱۲/۸۰
	۰/۵	٪۱۱/۲۱	٪۲۰/۵۲	٪۹/۲۸	٪۱۷/۱۵	٪۷/۸۴	٪۱۴/۶۲
	۱	٪۳/۷۶	٪۲۴/۰۸	٪۲/۱۴	٪۲۰/۱۶	٪۱/۸۶	٪۱۷/۲۴

نتایج مندرج در جدول ۸ نشان می‌دهد در سطح عدم قطعیت صفر، حدود به‌دست آمده برای سنجهٔ ES با هم برابرند. همچنین در سطح عدم قطعیت یک، این حدود که بیان‌کنندهٔ مقادیر خوش‌بینانه (کمتر از واقع) و بدبینانه (بیشتر از واقع) برای سنجهٔ مد نظرند، مقادیر متفاوتی را اختیار کرده‌اند.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش، دو سنجهٔ ریسک VaR و ES پرتفوی با لحاظ عدم قطعیت در داده‌های مالی برآورد شدند. در برآوردهای عددی به‌منظور رویارویی با عدم قطعیت بیان‌شده، از مفهوم متغیر

تصادفی فازی استفاده شده است. با توجه به اینکه داده‌های مالی دارای کشیدگی بیشتر و دم پهن‌تری نسبت به توزیع نرمال هستند، در این پژوهش برآوردها با فرض دو توزیع نرمال و تی استیودنت برای داده‌ها و همچنین در نظر گرفتن دو حالت ثابت و تصادفی برای فاکتور عدم قطعیت انجام شده است. تصادفی بودن فاکتور عدم قطعیت به سرمایه‌گذار امکان می‌دهد که براساس میزان عدم قطعیت قابل قبول برای وی، خوش‌بینانه‌ترین و بدبینانه‌ترین مقدار را برای هر دو سنجهٔ ریسک به‌دست آورده و بر حسب میزان ریسک‌پذیری خود، تصمیم‌های مناسبی اتخاذ کند. برآوردهای عددی نشان می‌دهد با توجه به اینکه پرتفوی ۱ نسبت به پرتفوی ۲ ریسک بیشتری دارد، دو سنجهٔ VaR و ES مقادیر بیشتری را در پرتفوی ۱ نسبت به پرتفوی ۲ اختیار کرده‌اند. همچنین نتایج به‌دست آمده حاکی از آن است که در نظر گرفتن توزیع t برای بازده دارایی‌ها، سبب دستیابی به برآوردهای محافظه‌کارانه‌تری برای هر دو سنجه ریسک شده است. در حالتی که فاکتور عدم قطعیت تصادفی است، در هر سطح اطمینان و به ازای هر میزان عدم قطعیت قابل قبول برای سرمایه‌گذار، دو مقدار برای ریسک برآورد شده است که حدود بالا و پایین به‌دست آمده در هر حالت، به‌ترتیب بیان‌کنندهٔ مقادیر بدبینانه و خوش‌بینانه برای سنجهٔ ریسک مد نظر هستند. توجه به حدود به‌دست آمده می‌تواند سرمایه‌گذار را در تصمیم‌گیری یاری کرده و میزان سرمایه در معرض خطر را در هر موقعیت سرمایه‌گذاری برآورد کند.

فهرست منابع

فلاح‌پور، س.؛ احمدی، ا. (۲۰۱۴). تخمین ارزش در معرض ریسک پرتفوی نفت و طلا با بهره‌مندی از روش کاپیولا- گارچ. *فصلنامهٔ علمی ـ پژوهشی تحقیقات مالی*، ۱۶ (۲)، ۳۲۶- ۳۰۹.

فلاح‌پور، س.؛ رضوانی، ف.؛ رحیمی، م. (۲۰۱۵). برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) با استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی متقارن و نامتقارن در بازار طلا و نفت. *دانش مالی تحلیل اوراق بهادار*، ۸(۲۶)، ۱۸-۱.

گرجی، م.؛ سجاد، ر. (۱۳۹۵). برآورد ارزش در معرض خطر چند دوره‌ای بر پایهٔ روش‌های شبیه‌سازی و پارامتریک. *تحقیقات مالی*، ۱۸(۱)، ۱۸۴-۱۶۷.

عبده تبریزی، ح.؛ شریفیان، ر. (۲۰۰۱). بررسی اثر ریسک نامطلوب بر عملکرد تعدیل شده بر اساس ریسک شرکت‌های سرمایه‌گذاری پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۹(۳)، ۲۰-۳.

Abdoe-Tabrizi, H. & Sharifian, R.A. (2001). The impact of downside risk on risk-adjusted performance of investment companies in the (Tehran Stock

Exchange). *Quarterly Journal of Securities Exchange*, 1(1), 35-70. (*in Persian*)

Artzner, P. & Delbaen, F. & Eber, J.M. & Heath, D. (1997). Thinking coherently. *Risk*, 10, 68–71.

Assaf, A. (2015). Value-at-Risk analysis in the MENA equity markets: Fat tails and conditional asymmetries in return distributions. *Journal of Multinational Financial Management*, *29*, 30-45.

Embrechts, P. & McNeil, A. & Straumann, D. (2002). *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls.* Cambridge, Cambridge University Press.

Fallahpour, S. & Ahmadi, E. (2015). Estimating Value at Risk of Portfolio of Oil and Gold by Copula-GARCH Method. *Journal of Financial Research*, 16(2), 309-326. (*in Persian*)

Fallahpour, S. & Rezvani, F. & Rahimi, M. (2015). Forecasting Conditional Value-at-Risk by Using Symmetric & Asymmetric Conditional Volatility Models in Gold & Oil Market*. Financial Knowledge of Securities Analysis,* 8(26), 1-18. (*in Persian*)

Fama, E. (1965). The behavior of stocks market prices. *Journal of Business*, 38(1), 34–105.

Fang, K. T., Kotz, S. & Ng, K. W. (1987). *Symmetric multivariate and related distributions*. Chapman and Hall.

Glasserman, P. & Heidelberger, P. & Shahabuddin, P. (2002). Portfolio Value-at-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors. *Mathematical Finance*, 12(3), 239-269.

Hosking, J.R.M. & Bonti, G. & Siegel, D. (2000). Beyond the lognormal. *Risk*, 13 (5), 59–62.

Kamdem, J.S. & Moussa, A.M. & Terraza, M. (2012). Fuzzy risk adjusted performance measures: Application to hedge funds*. Insurance: Mathematics and Economics*, 51(3), 702-712.

Kamdem, J.S. (2005). Value-at-Risk and expected shortfall for linear portfolios with elliptically distributed risk factors. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(05), 537-551.

Kamdem, J.S. (2009). Δ-VaR and Δ-TVaR for portfolios with mixture of elliptic distributions risk factors and DCC. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(3), 325-336.

Kelker, D. (1970). Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 32(4), 419-430.

Kjellson, B. (2013). *Forecasting expected shortfall: an extreme value approach* (Bachelor's Thesis), Lund university.

Kwakernaak, H. (1978). Fuzzy random variable definitions and theorems. *Information Sciences*, 15(1), 1-29.

Lopez, J.A. & Walter, C.A. (2000*). Evaluating covariance matrix forecasts in a value-at-risk framework*. Federal Reserve Bank of San Francisco.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(4), 394 - 419.

Martins, C. & Yao, F. (2006). *Estimation of value-at-visk and expected shortfall based on nonlinear models of return dynamics and extreme value theory.* Berkeley Electronic Press.

McNeil, A.J. & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7(3), 271-300.

Morgan, J.P. (1996). *Riskmetrics technical document* (4th ed.). New York.

Moussa, A. M., Kamdem, J. S., & Terraza, M. (2014). Fuzzy value-at-risk and expected shortfall for portfolios with heavy-tailed returns. *Economic Modelling*, *39*, 247-256.

Olson, D. L. & Wu, D. (2013). The impact of distribution on value-at-risk measures. *Mathematical and Computer Modelling*, *58*(9), 1670-1676.

Puri, M.L. & Ralescu, D.A. (1996). Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 114: 409–422.

Rostami Noroozabad, M. & Shojaei, A. & Khezri, M. & Rahmani Noroozabad, S. (2015). Estimation of value at risk of return in Tehran Stock Exchange using wavelet analysis. *Journal of Financial Research*, 17(1), 59-82. (*in Persian*)

Sajjad, R. & Gorji, M. (2016). Estimation of multi-period VaR based on the simulation and parametric methods. *Journal of Financial Research*, 18(1), 167-184. (*in Persian*)

Smimou, K. & Bector, C. R. & Jacoby, G. (2008). Portfolio selection subject to experts' judgments. *International Review of Financial Analysis*, 17(5), 1036-1054.

Yoshida, Y. (2009). An estimation model of value-at-risk portfolio under uncertainty. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(22), 3250-3262.

Wang, Z. & Kilr, G.J. (1993). *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, New York.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.

Zimmermann, H.J. (2001). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer.